

COGNOME E NOME

N. di matricola

FIRMA.....

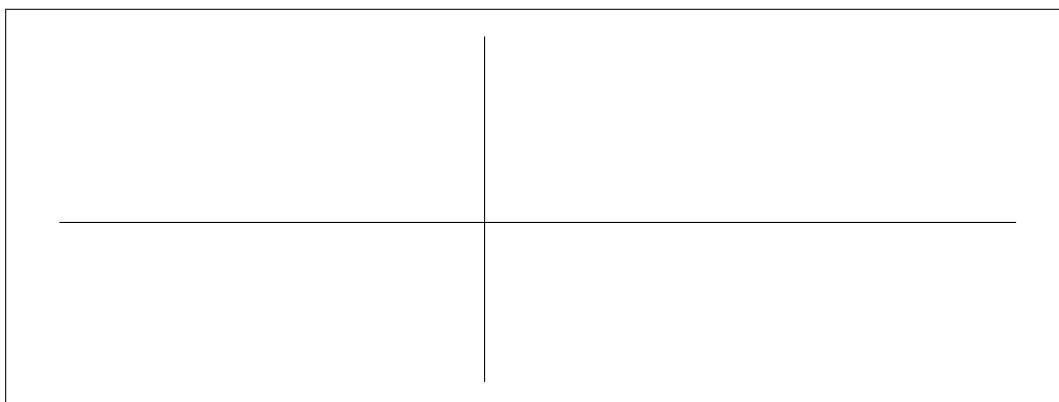
1. Determinare l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $g(x) = \arctan(\ln x^2 - 1)$ nel punto $x_0 = 1$.

4/30

2. (a) Disegnare in un sistema di riferimento cartesiano l'insieme

$$\Sigma_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - y)(x^2 + y^2 - 1)^2 + (xy - x^3)^4 = 0\}$$

4/30

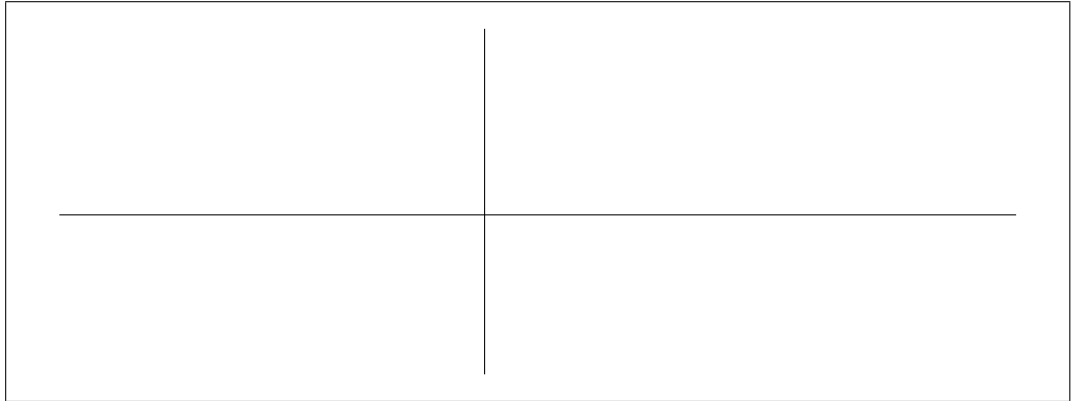


3. È data la funzione reale di variabile reale f definita da

$$f(x) = \ln \frac{x-1}{x}.$$

Disegnare il grafico di f , determinando in particolare il dominio $D(f)$ di definizione di f , eventuali simmetrie, i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti, eventuali punti di massimo e/o minimo locale/assoluto, monotonia.

8/30



4. Calcolare $I = \int \frac{x^3 - 3x^2 + 5x + 2}{x^2 + 1} dx$.

8/30

$I =$

5. Calcolare $L = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x$.

6/30

$L =$

1⁰ ESERCIZIO

Si ha $g'(x) = \frac{2}{x} \cdot \frac{1}{(\ln x^2 - 1)^2 + 1}$, quindi $g'(1) = 1$ l'equazione della retta richiesta é $y = g(1) + g'(1)(x - 1) = \frac{-\pi}{4} + (x - 1)$.

2⁰ ESERCIZIO

(a) Σ_0 é costituito dall'intersezione dei punti della circonferenza di centro l'origine e raggio unitario e dai punti della retta $y = 0$ ossia i punti $(-1, 0)$ e $(1, 0)$ oppure dall'intersezione dei punti della circonferenza di centro l'origine e raggio unitario e la parabola $y = x^2$.

3⁰ ESERCIZIO Il dominio é $\{x \in \mathbb{R} : \frac{x-1}{x} > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x < 0 \vee x > 1\}$. La funzione risulta essere positiva quando $\frac{x-1}{x} > 1$ cioé per $\frac{x-1}{x} - 1 > 0$ vale a dire $\frac{x-1-x}{x} > 0$, quindi moltiplicando per -1 si ottiene $\frac{1}{x} < 0$, in altri termini $x < 0$. La derivata prima é pari a $y' = \frac{x}{x-1} \cdot \frac{x-x+1}{x^2} = \frac{1}{x(x-1)}$ Pertanto la funzione é sempre crescente. Inoltre $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$.

4⁰ ESERCIZIO Siccome il grado del numeratore é maggiore del grado del denominatore procediamo alla divisione tra polinomi e si ottiene $x^3 - 3x^2 + 5x + 2 = (x - 3)(x^2 + 1) + 4x + 5$. Perciú $I = \int \frac{(x-3)(x^2+1)}{x^2+1} dx + \int \frac{4x+5}{x^2+1} dx = \int (x - 3) dx + 2 \int \frac{2x}{x^2+1} dx + 5 \int \frac{1}{x^2+1} dx = \frac{x^2}{2} - 3x + 2 \ln(x^2 + 1) + 5 \arctan x + c$.

5⁰ ESERCIZIO

Il limite in questione vale 0. Infatti $x^2 e^x = \frac{x^2}{e^{-x}}$. Applicando l'Hopital due volte si ottiene $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{-e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{e^{-x}} = 0$.