$\boxed{f(x) = (x+1)\sqrt[3]{x}}$

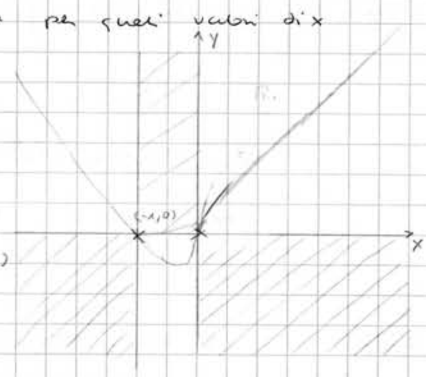
(1) determinare l'insieme di definizione (D_f) della funzione $y = (x+1)\sqrt[3]{x}$
la funzione risulta essere definita su tutto $\mathbb{R}$.
$x \in \mathbb{R}$ insieme dei numeri reali

(2) determinare il segno della funzione $f(x)$, determinare per quali valori di x $f(x) > 0$ e per quali $f(x) < 0$

$(x+1)\sqrt[3]{x} > 0$

$x+1 > 0$ per $x > -1$
$\sqrt[3]{x} > 0$ per $x > 0$

$f(x) > 0$ in $(-\infty, -1)$ e $(0, +\infty)$
$f(x) < 0$ in $(-1; 0)$



(3) determinare eventuali intersezione con gli assi

$\cap x \quad \begin{cases} y = 0 \\ (x+1)\sqrt[3]{x} = 0 \end{cases} \qquad (x+1)\sqrt[3]{x} = 0 \iff (x+1) = 0 \lor \sqrt[3]{x} = 0$
$x = -1 \qquad x = 0$

punti d'intersezione con l'asse x $\quad A = (-1, 0)$
$O = (0, 0)$

$\cap y \quad \begin{cases} x = 0 \\ (x+1)\sqrt[3]{x} = 0 \end{cases} \qquad O(0,0)$

(4) per verificare se la funzione presenta particolari simmetrie verifico se la funzione è pari o dispari

$f(-x) = ((-x)+1)\sqrt[3]{(-x)} = (-x)+1)\sqrt[3]{-x}$ la funzione risulta essere né pari né dispari, pertanto non presenta particolari simmetrie

(5) studio il comportamento della funzione a $+\infty$ e $-\infty$ per capire l'andamento della funzione agli estremi

$\lim_{x \to +\infty} (x+1)\sqrt[3]{x} = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} (x+1)\sqrt[3]{x} = +\infty$

la funzione non presenta asintoti orizzontali né asintoti verticali
verifico se ci sono asintoti obliqui del tipo $y = ax + b$

$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \qquad$ no asintoto obliquo

(6) calcolo la derivata prima $f'(x)$

$f(x) = (x+1)\sqrt[3]{x} = (x+1)\,x^{1/3} \qquad f'(x) = x^{1/3} + (x+1)\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$
$= \sqrt[3]{x} + \frac{1}{3}\frac{(x+1)}{\sqrt[3]{x^2}}$

$D(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
regola del prodotto

$f'(x) = 0 \qquad \sqrt[3]{x} + \frac{1}{3}\frac{(x+1)}{\sqrt[3]{x^2}} = 0 \qquad f(x) = x^{\frac{4}{3}} + x^{1/3}$

$f'(x) = \frac{4}{3}x^{1/3} + \frac{1}{3}x^{-2/3} \qquad y' = \frac{1}{3}(4x^{1/3} + x^{-2/3}) =$
$= \frac{1}{3}x^{1/3}(4 + x^{-1})$

$y' = 0 \iff x^{1/3} = 0 \iff x = 0$
$4 + \frac{1}{x} = 0 \qquad 4x + 1 = 0 \qquad x = -\frac{1}{4} = \text{min}$

$f\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{3}{4 \cdot 2^{2/3}} \cong -0.47$

$f''(x) = \frac{2(\cancel{-1+2x})}{9 \cdot x^{5/3}}$

(2) $\int_0^{\infty} e^x \sin x \, dx$

INTEGRAZIONE PER PARTI

$$\boxed{\int f(x) g'(x)\, dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x)\, dx}$$

$$\int e^x \sin x \, dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx$$

integro per parti 1 volta $\begin{cases} f(x) = e^x \\ g'(x) = \sin x \end{cases}$ $\quad f'(x) = e^x \quad g(x) = -\cos x$

$$= -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx$$

integro per parti

$f(x) = e^x \quad f'(x) = e^x$

$g'(x) = \cos x \quad g(x) = \sin x$

$$\int e^x \sin x \, dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx$$

$$2 \int e^x \sin x \, dx = e^x (\sin x - \cos x)$$

$$\int e^x \sin x \, dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + c$$

costante d'integrazione t.c. $c \in \mathbb{R}$

$$\int_0^{\infty} e^x \sin x \, dx = \lim_{b \to \infty} \int_0^b e^x \sin x \, dx = \lim_{b \to \infty} \left(e^b (\sin b - \cos b) - e^0 (\sin 0 - \cos 0) \right) =$$

$$= \lim_{b \to \infty} \left(e^b (\sin b - \cos b) + 1 \right)$$

(4) sviluppare in serie (MacLaurin) la funzione $\boxed{f = e^x}$

serie di MacLaurin è un "caso particolare" della serie di Taylor (in questa nella serie di MacLaurin pongo $a = 0$)

Taylor $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(a)\,(x-a)^n}{n!}}$ MacLaurin $\to$ pongo $\boxed{a=0}$

$f(x) = e^x$

$f'(x) = e^x$

$f''(x) = e^x$

$\vdots$

$f^n(x) = e^x$

if $a = 0 \to f^n(a) = e^0 = 1$

$$f(x) = e^x = \frac{1}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

sviluppo in serie di MacLaurin della funzione e^x

Sviluppo in serie di MacLaurin di $\boxed{f(x) = (-x^3)\, e^{-x^2}}$

considero lo sviluppo in serie di $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

l'argomento della funzione è $(-x^2)$

sostituisco alla serie $e^{-x^2} = 1 + (-x^2) + \frac{(-x^2)^2}{2!} + \frac{(-x^2)^3}{3!} + \dots =$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^{2n}}{n!}$$

per scrivere la funzione $f(x)$ $\sum_{n=0}^{\infty} (-x^3) \frac{(-x)^{2n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-x^3 (-x)^{2n}}{n!} = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-x^{2n+3}}{n!}}$

#