

11 sett / 07

Es. 1: Date la funzione ed il suo grafico

$$f''(x) = -\frac{2}{x^3}$$

sia $f''(x) = h(x)$

→ dominio di $h(x)$

$$D[h(x)] = \{x \in \mathbb{R} \text{ t.c. } x \neq 0\}$$

→ verifico se la funzione è pari o dispari per determinare se esistono particolari simmetrie

$$h(-x) = -\frac{2}{(-x)^3} = -\frac{2}{-x^3} = \frac{2}{x^3}$$

poiché $h(-x) = -h(x)$ risulta essere DISPARI ⇒ la funzione presenta simmetria rispetto all'origine

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{2}{x^3} = -\infty$$

↳ Studio il comportamento delle funzione $h(x)$ in 0^+ e 0^- (in 0 esse non risulta definita) ASINTOTO VERTICALE $x=0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} -\frac{2}{x^3} = +\infty$$

studio il comportamento delle funzione $h(x)$ a $+\infty$ e a $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{2}{x^3} = 0^-$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{2}{x^3} = 0^+$$

→ per determinare i punti stazionari calcolo le derivate prime delle funzione $h(x)$, cioè $h'(x)$

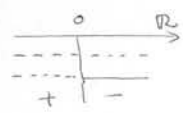
$$h(x) = -2x^{-3}$$

$$h'(x) = 6x^{-4}$$

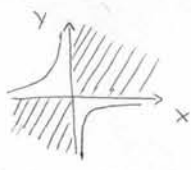
→ studio il segno delle funzione $h(x)$

$$h(x) \geq 0 \quad -\frac{2}{x^3} \geq 0$$

$$\begin{aligned} N \geq 0 & \quad -2 \geq 0 \text{ mai} \\ D \geq 0 & \quad x^3 > 0 \text{ se } x > 0 \end{aligned}$$



$$h(x) > 0 \quad \forall x < 0$$



(a) calcolare $f'(x)$ e $f(x)$

poiché INTEGRAZIONE e DERIVAZIONE sono operazioni INVERSE per determinare $f'(x)$ devo

$$\int f''(x) dx = f'(x) + c$$

da cui $\int \left(-\frac{2}{x^3}\right) dx = -2 \int (x^{-3}) dx = -2 \cdot \frac{1}{-2} x^{-2} + c = x^{-2} + c$

$$f'(x) = x^{-2}$$

e $\int f'(x) dx = f(x)$

da cui $\int (x^{-2}) dx = -1 \cdot x^{-1} + c = \frac{1}{x} + c$

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

(b) fare i grafici di $f'(x)$ e $f(x)$

$$f'(x) = \frac{1}{x^2}$$

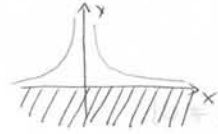
→ dominio delle funzioni $D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$

→ segno delle funzioni

$$\frac{1}{x^2} \geq 0 \quad N \geq 0 \quad 1 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$D \geq 0 \quad x^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{x^2} \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$



→ le funzioni non interseca gli assi

→ verificare se le funzioni \bar{f} pari o dispari per determinare se esiste particolari simmetrie

$$\frac{1}{(-x)^2} = \frac{1}{x^2}$$

$$\text{da cui } f'(x) = f'(-x)$$

le funzioni \bar{f} pari, quindi risulta simmetrica rispetto all'asse delle y

→ studio il comportamento delle funzioni in 0^+ e 0^-

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

→ studio il comportamento delle funzioni agli estremi con $+\infty$ e $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0^+$$

→ determino le derivate prime delle funzioni date

$$-\frac{2}{x^3}$$

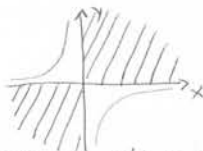
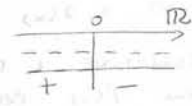


$$f(x) = -\frac{1}{x}$$

dominio $D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$

$$f(x) \geq 0 \quad -\frac{1}{x} \geq 0 \quad N \geq 0 \quad -1 \geq 0 \quad \text{mai}$$

$$D \geq 0 \quad x \geq 0$$



→ le funzioni non interseca gli assi

→ determinare se le funzioni \bar{f} pari o dispari

$$f(-x) = -\frac{1}{(-x)} = +\frac{1}{x} = -f(x)$$

$$f(-x) = -f(x)$$

le funzioni \bar{f} dispari \Rightarrow presenta simmetria rispetto all'origine degli assi $O = (0,0)$

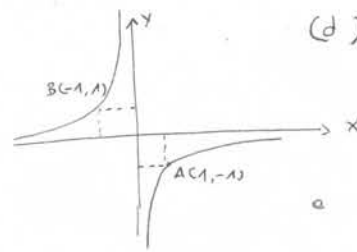
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$$

$$\frac{1}{x} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0^-$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0^+$$



(d) ASINTOTI :
 $x=0$ ASINTOTA VERTICALE
 $y=0$ ASINTOTA ORIZZONTALE

(c) continuità di $f(x)$

$$f(x) = -\frac{1}{x}$$

dominio delle funzione $f(x)$ $D[f(x)] = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$

Es. 3

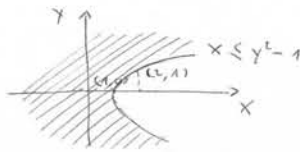
$$R = \begin{cases} Y \geq \sqrt{x-1} & \text{I} \\ Y \geq \sqrt{1-x} & \text{II} \\ Y \leq x & \text{III} \\ x \leq 2 & \text{IV} \end{cases}$$

I $Y \geq \sqrt{x-1}$

D di definizione $x \geq 1$

$$Y^2 \geq x-1$$

$$x \leq Y^2 - 1$$



poiché $Y \geq \sqrt{x-1}$

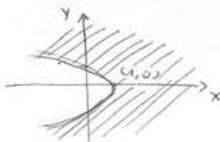
considera solo le parti $Y \geq 0$

II $Y \geq \sqrt{1-x}$

D di definizione $x \leq 1$

$$Y^2 \geq 1-x$$

$$x \geq 1-Y^2$$

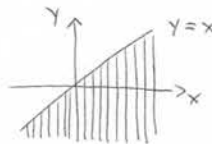


poiché $Y \geq \sqrt{1-x}$

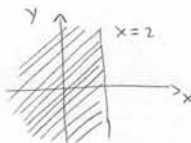
considera solo le parti $Y \geq 0$

III $Y \leq x$

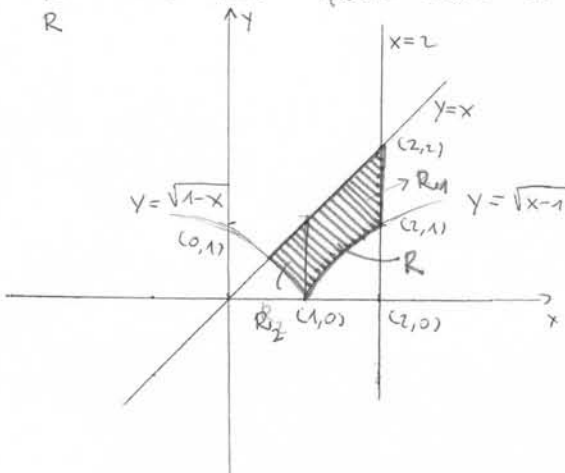
$Y=x$ bisettrice 1-3° quadrante



IV $x \leq 2$



(a) dopo aver fatto queste zone di considerazioni, possiamo determinare



(b) calcolando l'area di R , possiamo considerare la somma di R_1 e di R_2 , da cui \rightarrow

$$R = R_1 + R_2$$

$$R_1 = \int_1^2 (x - \sqrt{x-1}) dx$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}(x-1)^{3/2} \right) dx = \frac{5}{6}$$

$$R_2 = \int_0^1 (x - \sqrt{1-x}) dx$$

$$= \int_0^1 x dx - \int_0^1 (\sqrt{1-x}) dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=0}^{x=1} - \left[-\frac{2}{3}(1-x)^{3/2} \right]_{x=0}^{x=1}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{1-x} = y & \Rightarrow 1-x = y^2 \Rightarrow x = 1-y^2 \\ \sqrt{1-x} = x & \Rightarrow 1-x = x^2 \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0 \end{aligned}$$

ES. 4

$$f(x) = x \cdot e^{-x}$$

OSS. \leadsto $f(x) = x e^{-x} \leadsto$ DERIVATA DEL PRODOTTO
 $f(x) = g(x)h(x)$

$$f'(x) = g'(x)h(x) + g(x)h'(x)$$

calcolo le derivate prime, seconde
e terze per verificare che
compongono una

$$f'(x) = e^{-x} - x e^{-x} = e^{-x}(1-x) = -e^{-x}(-1+x)$$

$$f''(x) = e^{-x}(-2+x)$$

$$f'''(x) = -e^{-x}(-3+x)$$

$$f^{(4)}(x) = e^{-x}(-4+x)$$

$$\vdots$$
$$f^{(n)}(x) = (-1)^n (n+x) e^{-x}$$

Il dopo aver ottenuto il
composto modo per
calcolare le $f^{(n)}(x)$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot e^{-x} (x-n)$$

derivate n-esime delle funzioni
 $f(x)$