

# Soluzioni Esame Scritto Matematica - Laurea in Scienze dell'architettura

Università degli Studi di Udine - 28 giugno 2010

\*\*\*\*\* MATEMATICA 1 \*\*\*\*\*

Parte comune a chi affronta solo il modulo **1** o i moduli **1+2**

(20 punti + 3 punti bonus)

1. È data la funzione reale di variabile reale  $f$  definita da  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ . Si disegni il grafico di  $f$ , determinando in particolare il dominio  $D(f)$  di definizione di  $f$ , eventuali simmetrie, i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti, eventuali punti di massimo e/o minimo locale/assoluto, crescita/decrecenza, convessità/concavità. (10 punti)

## Soluzione

Dominio:  $x^2 + 1 > 0$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ , quindi  $D(f) = \mathbb{R}$ .

Segno:  $\sqrt{y} \geq 0$  per ogni  $y \in \mathbb{R}$ , quindi  $f(x) \geq 0$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ .

Simmetrie:  $f(-x) = \sqrt{(-x)^2 + 1} = \sqrt{x^2 + 1} = f(x)$ . Quindi  $f$  è pari.

Limiti agli estremi:  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} |x|\sqrt{1 + 1/x^2} = +\infty$ ; infatti basta notare che se  $x \rightarrow \infty$ , allora  $\sqrt{1 + 1/x^2} \rightarrow 1$ .

Asintoti: Siccome il seguente limite esiste ed è finito:  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)/x = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} |x|\sqrt{1 + 1/x^2}/x = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\pm 1)\sqrt{1 + 1/x^2} = \pm 1$ , si procede con il limite:  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) \mp x = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{x^2 + 1} \mp x = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sqrt{x^2 + 1} \mp x) \frac{\sqrt{x^2 + 1} \pm x}{\sqrt{x^2 + 1} \pm x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} \pm |x|} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} \pm |x|} = 0$ . Dunque gli asintoti esistono per  $x \rightarrow \pm\infty$  ed hanno equazione  $y = |x|$ .

Derivata prima:  $f'(x) = \frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ , quindi  $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$ ,  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ,  $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0$  e dunque  $f \nearrow$  (cresce) in  $\{x > 0\}$ ,  $f \searrow$  (decrece) in  $\{x < 0\}$  e l'unico punto critico si trova in  $x = 0$  ed è di minimo assoluto, ove  $f(0) = 1$ .

Derivata seconda:  $f''(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1} - x \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x^2 + 1} = \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1}^3} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}^3}$ , e dunque  $f''(x) > 0$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ . Dunque  $f \smile$  (è convessa) per ogni  $x \in \mathbb{R}$ .

Il disegno è ora lasciato agli studenti.

2. Sia  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} g(x) = c$ . Si discuta la continuità di  $g$  al variare dei possibili  $x_0$  e  $c$  per i quali i limiti hanno senso. (4 punti)

**Soluzione**

Si noti che i due limiti in questione sono valutati a destra e a sinistra di  $x_0$ , quindi si può escludere che  $x_0 = +\infty$  e  $x_0 = -\infty$ , ossia si può affermare che  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Inoltre, dalla teoria e dalle ipotesi vale che  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = c$ . Infine,  $g$  è continua in  $x_0$  se e solo se  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$ .

Dunque, se  $c \in \mathbb{R}$  e  $c = g(x_0)$ , allora  $g$  è continua in  $x_0$ , mentre se  $g(x_0) \neq c \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ , allora  $g$  non può essere continua in  $x_0$ .

3. Si calcoli

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin(x)} - 1}{2x}. \quad (4 \text{ punti})$$

**Soluzione**

Si noti che, dopo aver verificato le ipotesi, il limite in questione si può calcolare con il teorema di de L'hôpital.

Tuttavia qui lo calcoliamo utilizzando solamente i limiti notevoli e la teoria sui limiti, senza far uso del calcolo differenziale.

Riscriviamo il limite come segue:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin(x)} - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin(x)} - 1}{\sin(x)} \cdot \frac{\sin(x)}{x} \cdot \frac{1}{2}$ .

Sappiamo che  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ . Inoltre, ponendo  $\sin(x) = t$ , da cui segue che  $x \rightarrow 0 \Rightarrow t \rightarrow 0$ , si ottiene  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin(x)} - 1}{\sin(x)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$  (limite notevole).

Basta infine osservare che abbiamo a che fare con un prodotto i cui fattori hanno limiti finiti, e dunque il limite è dato dal prodotto dei limiti dei fattori, ossia  $1 \cdot 1 \cdot 1/2 = 1/2$ .

4. Si calcoli l'integrale indefinito, ossia tutte le primitive, della funzione

$$\psi(x) = (x + 1)(\cos(x + 2)); \quad (4 \text{ punti})$$

si calcoli poi l'integrale definito  $\int_{\pi/2}^{\pi} \psi(x) dx$ . (1 punto)

**Soluzione**

La funzione è continua (la verifica è lasciata al lettore) e quindi integrabile, dunque si può procedere.

Ponendo preliminarmente  $x + 2 = t$ , si ottiene che  $dx = dt$  e  $x + 1 = t - 1$ , da cui

$\int (x + 1)(\cos(x + 2)) dx = \int (t - 1) \cos t dt = \int t \cos t dt - \int \cos t dt$ . (L'ultima uguaglianza è vera grazie alla linearità dell'integrale).

Ora si può procedere separatamente:  $\int t \cos t dt$  è integrabile per parti, infatti vale  $\int t \cos t dt = t \sin t - \int \sin t dt = t \sin t + \cos t + k$ , inoltre (banalmente) vale che  $-\int \cos t dt = -\sin t + k'$ , e dunque l'integrale indefinito cercato è  $t \sin t + \cos t - \sin t + c = (x + 2) \sin(x + 2) + \cos(x + 2) - \sin(x + 2) + c = (x + 1) \sin(x + 2) + \cos(x + 2) + c$   $c \in \mathbb{R}$ .

Ora l'integrale definito è immediatamente calcolabile come segue:  $\int_{\pi/2}^{\pi} \psi(x) dx = [(x + 1) \sin(x + 2) + \cos(x + 2)]_{\pi/2}^{\pi} = (\pi + 1) \sin(\pi + 2) + \cos(\pi + 2) - (\pi/2 + 1) \sin(\pi/2 + 2) + \cos(\pi/2 + 2) = -(\pi + 1) \sin 2 - \cos 2 - (\pi/2 + 1) \cos 2 - \sin 2 = -(\pi + 2) \sin 2 - (\pi/2 + 2) \cos 2$ .

### Parte aggiuntiva per chi affronta solo il modulo 1 (10 punti)

5. Si determini l'equazione della tangente al grafico della funzione dell'esercizio 1 nel punto  $(1, f(1))$ .  
(2 punti)

#### Soluzione

Innanzitutto vale  $(1, f(1)) = (1, \sqrt{2}) = P \in \mathcal{G}(f)$  e  $f'(1) = 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2$  (si veda la soluzione all'esercizio 1). Ora, l'equazione della retta tangente al punto  $P$  è data da  $(y - f(1)) = f'(1)(x - 1)$ , ossia  $y - \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - 1)$ , che si può riscrivere come  $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

6. Sia  $f$  come nell'esercizio 1, e sia  $\varphi(x) = f(x) - 2$ . Si dimostri che  $\varphi(x)$  ammette uno zero e se ne calcoli uno con un errore inferiore a  $2^{-2}$ . (5 punti)

#### Soluzione

Si osservi che  $\varphi(1) = \sqrt{1^2 + 1} - 2 < 0$ ,  $\varphi(2) = \sqrt{2^2 + 1} - 2 > 0$  e che  $\varphi(x)$  è continua. Dunque uno zero per  $\varphi(x)$  esiste, e possiamo affermare che tale zero lo si può cercare nell'intervallo  $I_0 = ]1, 2[$ . Valutando  $\varphi$  nel punto medio di  $I_0$ , otteniamo  $\varphi(3/2) = \sqrt{9/4 + 1} - 2 = \sqrt{13/4} - 2 < \sqrt{16/4} - 2 = 0$ . Dunque il punto  $x$  cercato appartiene all'intervallo  $I_1 = ]3/2, 2[$ .

Di nuovo, si tratta ora di valutare  $\varphi$  in  $7/4$ , ossia nel punto medio di  $I_1$ :  $\varphi(7/4) = \sqrt{49/16 + 1} - 2 = \sqrt{65/16} - 2 > \sqrt{64/16} - 2 = 0$ . Dunque il punto  $x$  cercato appartiene all'intervallo  $I_2 = ]3/2, 7/4[$ .

Si conclude che il punto medio di  $I_2 = ]3/2, 7/4[$ , ossia  $13/8$ , approssima lo zero cercato con un errore minore di  $|7/4 - 3/2| = 1/4 = 2^{-2}$ .

7. Si scriva il polinomio di Taylor di grado 3 della funzione dell'esercizio 6 centrato in  $x = 1$ .

(4 punti)

**Soluzione**

Dopo aver ricordato che il polinomio di Taylor  $\mathcal{T}_{\varphi,3,1}$  cercato è dato da  $\sum_{i=0}^3 \frac{1}{i!} \varphi^{(i)}(1)(x-1)^i$  e aver notato che  $\varphi$  è ottenuta da  $f$  sommando una costante, e quindi le derivate di  $\varphi$  coincidono con quelle di  $f$ , resta solo da valutare le derivate  $i$ -esime di  $\varphi$  in 1 fino ad  $i = 3$ :  $\varphi(1) = \sqrt{2} - 2$ ;  $\varphi'(x) = f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$  e dunque  $\varphi'(1) = 1/\sqrt{2}$ ;  $\varphi''(x) = f''(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+1}}$  e dunque  $\varphi''(1) = 1/\sqrt[3]{2}$ . Infine  $\varphi'''(x) = f'''(x) = -\frac{3x}{\sqrt[5]{x^2+1}}$  e dunque in particolare  $\varphi'''(1) = -3/\sqrt[5]{2}$ . Si conclude quindi che  $\mathcal{T}_{\varphi,3,1} = \sqrt{2} - 2 + \sqrt{2}(x-1) + (x-1)^2/\sqrt[3]{2} - 3(x-1)^3/\sqrt[5]{2}$ . Eventualmente, si possono sviluppare le potenze del binomio  $(x-1)$  così da ottenere un polinomio in forma ridotta.

\*\*\*\*\* MATEMATICA 2 \*\*\*\*\*

Parte comune a chi affronta solo il modulo **2** o i moduli **1+2**

(10 punti + 5 punti bonus)

8. Sia  $r \subset \mathbb{R}^3$  la retta data dalle equazioni  $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$  e  $s \subset \mathbb{R}^3$  la retta parametrizzata da

$s(t) = (2, -1, 1) + t(-1, 1, -1)$ . Si trovi

(a) il punto  $P \in \mathbb{R}^3$  tale che  $\{P\} = r \cap s$ ; (1 punto)

(b) un'equazione del piano  $\pi \subset \mathbb{R}^3$  tale che  $r \subset \pi$  e  $s \subset \pi$ . (3 punti)

**Soluzione**

(a) Se  $\{P\} = r \cap s$ , allora, in particolare,  $P = (2-t, -1+t, 1-t) \in s$  deve soddisfare

$$\begin{cases} 2-t-1+t+1-t=1 \\ 2(2-t)+1-t=2, \end{cases} \quad \text{il che dà } t=1 \text{ e quindi } P=(1,0,0).$$

- (b) Si può procedere calcolando un vettore  $\mathbf{v}$  che definisce la direzione di  $r$  utilizzando i coefficienti delle equazioni di  $r$ :

$$\vec{v} = (1, 1, 1) \times (2, -1, 0) = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = (1, 2, -3).$$

Ora, il vettore  $\vec{w}$  associato all'equazione di  $\pi$  deve essere ortogonale a entrambi  $\vec{v} = (1, 2, -3)$  e  $(-1, 1, -1)$ , e dunque

$$\vec{w} = (1, 2, -3) \times (-1, 1, -1) = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = (1, 4, 3).$$

Possiamo ora concludere che l'equazione cercata è del tipo  $x + 4y + 3z = c$ , e dovendo essere  $P \in \pi$ , deve valere  $1 + 4 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 1 = c$ , da cui segue che l'equazione cercata è  $x + 4y + 3z = 1$ .

9. È data la funzione  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = x^4 + 4xy + y^4$ .

- (a) Si dimostri che  $f$  è differenziabile. (2 punti)
- (b) Si calcolino i punti critici di  $f$  e si dica di che tipo sono. (4 punti)

### Soluzione

- (a) Le derivate parziali prime di  $f$  sono

$$f_x = 4x^3 + 4y \text{ e } f_y = 4y^3 + 4x.$$

Essendo  $f_x$  e  $f_y$  funzioni polinomiali, esse sono continue, e ciò dimostra che  $f$  è differenziabile.

Bastava peraltro osservare che essendo  $f$  polinomiale, sono polinomiali anche le sue derivate parziali (senza bisogno di calcolarle), e quindi  $f$  è differenziabile.

- (b) Il dominio di  $f$  è tutto il piano reale e  $f$  è differenziabile, dunque cerchiamo i punti critici semplicemente servendoci delle derivate parziali calcolate nella risposta 9a, da cui segue che  $f_x = 0$  se  $y = -x^3$  e quindi che  $f_y = 0$  se  $-x^9 + x = 0$ , ossia se  $x(x^8 - 1) = 0$ . Segue che deve essere  $x = 0$  e  $y = 0$ , oppure  $x = \pm 1$  e  $y = \mp 1$ . Riassumendo,  $\{\nabla f = 0\} = \{(0, 0), (\pm 1, \mp 1)\}$ .

Passando alle derivate seconde otteniamo:  $f_{xx} = 12x^2$ ,  $f_{xy} = f_{yx} = 4$  e  $f_{yy} = 12y^2$ . Ricordando che  $H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & 4 \\ 4 & 12y^2 \end{pmatrix}$ , segue  $\det H_f(x, y) = 144x^2y^2 - 16$ .

Ora, relativamente ai punti critici suddetti, è facile stabilire che  $\det H_f(0, 0) = -16 < 0$ , e dunque  $(0, 0)$  è un punto di sella.

Circa i punti critici  $(\pm 1, \mp 1)$ , è immediato stabilire che  $\det H_f(\pm 1, \mp 1) = 144 - 16 = 128 > 0$ , e dunque ora si deve valutare il segno di  $f_{xx}$ : da  $f_{xx}(\pm 1, \mp 1) = 12 > 0$  segue che  $(\pm 1, \mp 1)$  sono punti di minimo.

10. Date la regione limitata  $D \subseteq \mathbb{R}^3$  delimitata dalle superficie  $\{x = 0\}$ ,  $\{y = 0\}$ ,  $\{z = 0\}$  e  $\{x + y + z = 1\}$  e la funzione  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y, z) = z$ ,

(a) si disegni  $D$ ; (1 punto)

(b) si calcoli l'integrale di volume  $\iiint_D f dV$ . (4 punti)

### Soluzione

Dopo aver studiato la situazione, si conclude che la sequenza di integrali più economica è

$$\begin{aligned} \iiint_D f dV &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} z dz dy dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{1-x} [z^2]_0^{1-x-y} dy dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{1-x} (1-x-y)^2 dy dx = \frac{1}{2} \int_0^1 [y + yx^2 + y^3/3 - 2xy - y^2 + xy^2]_0^{1-x} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (1/3 - x + x^2 - x^3/3) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{3}(1-x)^3 dx = -\frac{1}{6} \left[ \frac{1}{4}(1-x)^4 \right]_0^1 = \frac{1}{24}. \end{aligned}$$

Il disegno viene lasciato come esercizio ai lettori.

### Parte aggiuntiva per chi affronta solo il modulo **2**

(10 punti + 4 punti bonus)

11. Sia  $f$  la funzione dell'esercizio 9.

(a) Si dica se  $f$  è limitata o meno; (1 punto)

(b) si determini l'equazione del piano tangente nel punto  $(1, 0)$ ; (2 punti)

(c) si calcoli la derivata direzionale in  $(1, 0)$  rispetto al vettore definito da  $\mathbf{v} = (1, 1)$ .

(2 punti)

### Soluzione

- (a) Ponendo  $\tilde{f}(x) = f(x, 0) = x^4$ , si conclude immediatamente che  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \tilde{f}(x) = +\infty$ , e dunque  $\tilde{f}$ , e in particolare  $f$  stessa, sono illimitate.
- (b) Inoltre, sfruttando il calcolo delle derivate parziali dalla soluzione dell'esercizio 9 e ricordando la teoria, sappiamo che il piano tangente  $\mathcal{T}_{f,(1,0)}$  cercato è dato dalla formula  $\mathcal{T}_{f,(1,0)} = \{f_x(1,0)(x-1) + f_y(1,0)(y-0) - (z-f(1,0)) = 0\} = \{4(x-1) + 4y - (z-1)\} = \{4x + 4y - z = 3\}$ .
- (c) Infine, scriviamo il versore  $\mathbf{u}$  associato al vettore  $(1, 1)$ :  $\mathbf{u} = \frac{(1, 1)}{|(1, 1)|} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ . Ora, essendo  $f$  polinomiale e quindi certamente differenziabile, la derivata direzionale cercata è data dalla formula:  $D_{\mathbf{u}}f(1, 0) = \nabla f(1, 0) \cdot \mathbf{u} = (4, 4) \cdot (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}$ .

12. È data la funzione a valori vettoriali  $\vec{r}: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\vec{r}(t) = \sqrt{t}\vec{i} + (t/\sqrt{2})\vec{j} + (\sqrt{t^3}/3)\vec{k}$ .

- (a) Si verifichi che la curva  $\mathcal{R} = \vec{r}([0, 2])$  è regolare; (2 punti)
- (b) si calcoli la lunghezza d'arco  $s(t)$ ; (3 punti)
- (c) si calcoli la lunghezza di  $\mathcal{R}$ . (1 punto)

### Soluzione

- (a) La derivata prima di  $\vec{r}$  vale  $\vec{r}' = \frac{1}{2\sqrt{t}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j} + \frac{\sqrt{t}}{2}\vec{k} \neq \vec{0}$  per ogni  $t \in [0, 2]$ , e dunque  $\mathcal{R}$  è regolare.
- (b) Ora,  $|\vec{r}'(t)| = \sqrt{1/4t + 1/2 + t/4} = \sqrt{(1+2t+t^2)/4t} = \sqrt{(1+t)^2/4t} = (1+t)/2\sqrt{t}$ , e dunque vale che la lunghezza d'arco è data da  $s(t) = \int_0^t |\vec{r}'(u)| du = \int_0^t (1+u)/2\sqrt{u} du = [\sqrt{u} + \sqrt{u^3}/3]_0^t = \sqrt{t} + \sqrt{t^3}/3 = \sqrt{t}(1+t/3)$ .
- (c) In particolare  $L(\mathcal{R}) = s(2) = \sqrt{2}(1+2/3) = 5\sqrt{2}/3$ .

13. Si determini il piano osculatore alla curva  $\mathcal{R}$  nel punto  $P = \vec{r}(1) \in \mathcal{R} \subseteq \mathbb{R}^3$ , dove  $\mathcal{R}$  è come nell'esercizio 12 (si usi il parametro  $t$  e non la lunghezza d'arco). (5 punti)

### Soluzione

Sfruttando il calcolo della soluzione dell'esercizio 12 e dalla definizione di tangente si ha che

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|} = \frac{1}{1+t}\vec{i} + \frac{\sqrt{2t}}{1+t}\vec{j} + \frac{t}{1+t}\vec{k}, \text{ quindi } \vec{T}(1) = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} + \frac{1}{2}\vec{k}.$$

$$\text{Inoltre, } \vec{T}'(t) = -\frac{1}{(1+t)^2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2t} - \sqrt{2t}}{(1+t)^2}\vec{j} + \frac{1+t-t}{(1+t)^2}\vec{k} = -\frac{1}{(1+t)^2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{(1+t)^2}\vec{j} + \frac{1}{(1+t)^2}\vec{k},$$

$$\text{quindi } \vec{T}'(1) = \frac{1}{4}(-\vec{i} + \sqrt{2}\vec{j} + \vec{k}), \quad |\vec{T}'(1)| = 1/2 \text{ e } \vec{N}(1) = \frac{\vec{T}'(1)}{|\vec{T}'(1)|} = \frac{1}{2}(-\vec{i} + \sqrt{2}\vec{j} + \vec{k}).$$

Ora segue che  $\vec{B}(1) = \vec{T}(1) \times \vec{N}(1) = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1/2 & \sqrt{2}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{2}/2 & 1/2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\vec{j} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k}$ .

Siccome il piano osculatore richiesto contiene il punto  $P = \vec{r}(1) = (1, 1/\sqrt{2}, 1/3)$ , l'equazione cercata è

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{\vec{r}, P} &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -\frac{1}{2} \left( y - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \left( z - \frac{1}{3} \right) = 0 \right\} = \\ &= \left\{ -y/2 + \sqrt{2}z/2 + \left( 1/2\sqrt{2} - 1/3\sqrt{2} \right) = 0 \right\} = \\ &= \left\{ -y/2 + \sqrt{2}z/2 + 1/6\sqrt{2} = 0 \right\} = \\ &= \left\{ 3\sqrt{2}y - 3z - 1 = 0 \right\}. \end{aligned}$$