Soluzioni Esame Scritto Matematica - Laurea in Scienze dell'architettura

Università degli Studi di Udine - 10 febbraio 2010

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆ MATEMATICA 1 ⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Parte comune a chi affronta solo il modulo $\boxed{1}$ o i moduli $\boxed{1+2}$

(20 punti + 3 punti bonus)

1. È data la funzione reale di variabile reale f definita da $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$. Si disegni il grafico di f, determinando in particolare il dominio $D(f)$ di definizione di f, eventuali simmetrie, i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti, eventuali punti di massimo e/o minimo locale/assoluto, crescenza/decrescenza, convessità/concavità. (9 punti)

   Soluzione

   Dominio: $x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1 \Rightarrow D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

   Segno: $f(x) > 0 \Leftrightarrow x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$, $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

   Simmetrie: $f(-x) = \dfrac{(-x)^2}{(-x)-1} = \dfrac{x^2}{-x-1} \neq \pm f(x)$. Quindi f non è simmetrica.

   Limiti agli estremi: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2}{x-1} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2}{x(1-1/x)} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x}{1-1/x} = \pm\infty$. In realtà basta osservare che il polinomio al numeratore ha grado maggiore del polinomio al denominatore $(2 > 1)$, e quindi il limite tende a infinito, con il segno dipendente dal segno del rapporto tra i coefficienti dominanti, ossia $1/1 = 1$, moltiplicato per $(\pm 1)^{2-1}$.

   Inoltre, $\lim\limits_{x\to\pm 1} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm 1} \dfrac{x^2}{x-1} = \pm\infty$, essendo un limite del tipo $1/0^{\pm}$. In particolare $x = 1$ è un asintoto verticale.

   Asintoti: Siccome il seguente limite esiste ed è finito: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)/x = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2}{x(x-1)} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x}{x-1} = 1$, si procede con il seguente limite: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) - x = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2 - x(x-1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2 - x^2 + x}{x-1} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x}{x-1} = 1$. Dunque l'asintoto esiste per $x \to \pm\infty$ ed ha equazione $y = x + 1$.

   Derivata prima: $f'(x) = \dfrac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \dfrac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}$, quindi $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 0 \vee x > 2$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0, 2\}$, $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 2$, $x \neq 1$ e dunque $f \nearrow$ (cresce) in $\{x <$

$0 \vee x > 2\}$, $f \searrow$ (decresce) in $\{0 < x < 2,\ x \neq 1\}$. I punti critici sono di massimo relativo in $x = 0$, ove $f(0) = 0$ e di minimo relativo in $x = 2$, ove $f(2) = 4$. Infine, f non ammette minimo e massimo assoluti.

Derivata seconda: $f''(x) = \dfrac{(2x-2)(x-1)^2 - (x^2-2x)\cdot 2\cdot(x-1)}{(x-1)^4} =$
$\dfrac{2(x-1)(x^2-2x+1-x^2+2x)}{(x-1)^4} = \dfrac{2}{(x-1)^3}$, e dunque $f''(x) > 0$ se $x - 1 > 0$, ossia se $x > 1$, mentre $f''(x) < 0$ se $x - 1 < 0$, ossia se $X < 1$. Dunque $f \smile$ (è convessa) in $\{x > 1\}$ e $f \frown$ (è concava) in $\{x < 1\}$.

Il disegno è ora lasciato agli studenti.

2. Si studi $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-x} - \sqrt{x^2+x}$. (5 punti)

Soluzione

Dopo aver scritto la prima radice come $\sqrt{x(x-1)}$, si nota che il limite è del tipo $\infty - \infty$, e che conviene procedere moltiplicando la funzione data per $\dfrac{\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x^2+x}}{\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x^2+x}}$, così da ottenere
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-x-x^2-x}{\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x^2+x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x}{\sqrt{x^2(1-1/x)}+\sqrt{x^2(1+1/x)}} =$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-2x}{x\sqrt{1-1/x}+x\sqrt{1+1/x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x}{x(\sqrt{1-1/x}+\sqrt{1+1/x})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2}{\sqrt{1-1/x}+\sqrt{1+1/x}}.$$
Ora basta osservare che $\sqrt{1+1/x} \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} 1$ e dunque $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{-2}{\sqrt{1-1/x}+\sqrt{1+1/x}} = -1$

3. Siano A e B due insiemi, e sia $f : A \to B$ una funzione tale che $\forall x \in A$ vale $f(x) = b \in B$. Al variare di A e B si discuta la verità o falsità delle seguenti affermazioni:

   (a) f è iniettiva;

   (b) f è suriettiva.

   (4 punti)

Soluzione

(a) Iniettività: f è iniettiva se e solo se A ha un unico elemento (si osservi che se A ammettesse due elementi $x_1,\ x_2 \in A,\ x_1 \neq x_2$, si avrebbe $f(x_1) = b = f(x_2)$).

(b) Suriettività: f è suriettiva se e solo se B ha un unico elemento (si osservi che se $B = \{b\}$, allora $\forall y \in B\ \exists x \in A : f(x) = y$).

4. Si calcoli l'integrale indefinito $\displaystyle\int \frac{x+\sqrt{x+1}}{x+1}dx$. (5 punti)

Soluzione

La funzione è continua (la verifica è lasciata al lettore) e quindi integrabile, dunque si può procedere come segue:

$$\int \frac{x+\sqrt{x+1}}{x+1}dx = \int \frac{x}{x+1}dx + \int \frac{\sqrt{x+1}}{x+1}dx = \int \frac{x+1}{x+1}dx - \int \frac{1}{x+1}dx + \int \frac{1}{\sqrt{x+1}}dx =$$
$$\int dx - \int \frac{1}{x+1}dx + 2\int \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x+1}}dx = x - \ln(x+1) + 2\sqrt{x+1} + k,\ k \in \mathbb{R}.$$

Parte aggiuntiva per chi affronta solo il modulo $\boxed{1}$ (10 punti)

5. Si determini l'equazione della tangente al grafico della funzione dell'esercizio 1 nel punto $(2, f(2))$. (2 punti)

Soluzione

Innanzitutto vale $(2, f(2)) = (2,4) = P \in \mathscr{G}(f)$ e $f'(2) = 0$ (si veda la soluzione all'esercizio 1). Ora, l'equazione della retta tangente al punto P è data da $(y - f(2)) = f'(2)(x-2)$, ossia $y = 4$. Si noti che 2 è un punto di minimo e quindi la tangente è orizzontale.

6. Si dimostri che la funzione $f(x) = x^3 + x^2 + 2x + 1$ ammette uno zero e se ne calcoli uno con un errore inferiore a 2^{-2}. (4 punti)

Soluzione

Si osserva che vale $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ e che la funzione è continua, dunque uno zero per essa esiste.

Inoltre $f(-1) = -1 < 0$, mentre $f(0) = 1 > 0$, dunque un punto x cercato appartiene all'intervallo $I_0 =]-1, 0[$. Valutando f nel punto medio di I_0, otteniamo $f(-1/2) = -1/8 + 1/4 - 1 + 1 = 1/8 > 0$. Dunque il punto x cercato appartiene all'intervallo $I_1 =]-1, -1/2[$.

Di nuovo, si tratta ora di valutare f in $x = -3/4$, ossia nel punto medio di I_1: $f(-3/4) = -27/64 + 9/16 - 3/2 + 1 = -23/64 < 0$. Si conclude che il punto medio di $I_2 =]-3/4, -1/2[$, ossia $-5/8$, approssima lo zero cercato con un errore minore di $|-3/4 - (-1/2)| = 1/4 = 2^{-2}$.

7. Si scriva il polinomio di Taylor di grado 3 della funzione dell'esercizio 6 centrato in $x = 1$. (4 punti)

Soluzione

Dopo aver ricordato che il polinomio di Taylor $\mathscr{T}_{f,3,1}$ cercato è dato da $\sum_{i=0}^{3} \frac{1}{i!} f^{(i)}(1)(x-1)^i$, resta solo da valutare le derivate $i-$esime di f in 1 fino ad $i = 3$: $f(1) = 5$; $f'(x) = 3x^2 + 2x + 2$ e dunque $f'(1) = 7$; $f''(x) = 6x + 2$ e dunque $f''(1) = 8$. Infine, $f'''(x) = 6$ e dunque in particolare $f'''(1) = 6$. Dunque $\mathscr{T}_{f,3,1} = 5 + 7(x-1) + \frac{8}{2}(x-1)^2 + \frac{6}{6}(x-1)^3$. Eventualmente, si possono sviluppare le potenze del binomio $(x - 1)$ così da ottenere un polinomio in forma ridotta.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆ MATEMATICA 2 ⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Parte comune a chi affronta solo il modulo $\boxed{2}$ o i moduli $\boxed{1+2}$

(10 punti + 5 punti bonus)

8. Sia P_1 il piano contenente i seguenti 3 punti: l'origine $O \in \mathbb{R}^3$, $A = (3, 2, 0) \in \mathbb{R}^3$ e $B = (1, -1, -1) \in \mathbb{R}^3$; sia poi $P_2 = (2x - 3y + 5z + 1 = 0) \subset \mathbb{R}^3$ un secondo piano. Dire quale dei seguenti casi si verifica:

   (a) i piani coincidono ($P_1 = P_2$);

   (b) i piani si intersecano in una retta $\mathscr{R} = P_1 \cap P_2$. In questo caso si descriva $\mathscr{R}$;

   (c) i piani sono paralleli. In questo caso si calcoli la distanza $\mathrm{d}(P_1, P_2)$ tra P_1 e P_2.

   (3 punti)

Soluzione

Al fine di individuare un'equazione che definisca P_1, si può procedere individuando i vettori $\overrightarrow{OB} = (3-0, 2-0, 0-0) = (3, 2, 0)$ e $\overrightarrow{OA} = (1-0, -1-0, -1-0) = (1, -1, -1)$, che definiscono un vettore $\overrightarrow{v}$ ortogonale al piano P_1 mediante il prodotto vettoriale:

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OA} = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{k} & \vec{k} \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = (-2, 3, -5).$$

Ora, dovendo essere $O \in P_1$, segue che un'equazione per P_1 è $-2x + 3y - 5z = 0$.

A questo punto basta osservare che le parti lineari delle equazioni dei piani in questione sono proporzionali, ossia $(2, -3, 5) = -1(-2, 3, -5)$, ma che le quaterne dei coefficienti non lo sono, ossia non esiste alcun $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $(2, -3, 5, 1) = \alpha(-2, 3, -5, 0)$, e dunque i piani sono paralleli.

Per calcolare la distanza tra i piani, individuiamo un punto $P \in P_2$, ad esempio $P = (-1/2, 0, 0)$, e con il punto $O \in P_1$ otteniamo il vettore $\overrightarrow{OP} = (-1/2, 0, 0)$.

Ora, $d(P_1, P_2) = \dfrac{|\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{v}|}{|\overrightarrow{v}|} = \dfrac{|(-1/2, 0, 0) \cdot (-2, 3, -5)|}{\sqrt{(-2)^2 + 3^2 + (-5)^2}} = 1/\sqrt{38}$.

9. Date la regione limitata $D \subseteq \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ x^2 + y^2 = 0\}$ delimitata dalle superficie $\{z = 2\}$ e $\{z = x^2 + y^2\}$ e la funzione $f : D \to \mathbb{R},\ f(x, y, z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, si disegni D e si calcoli l'integrale di volume $\iiint_D f dV$. (5 punti)

Soluzione

Dopo aver studiato la situazione ed aver notato la simmetria assiale di D, si deduce che è il caso di procedere con un cambio di variabile in modo da sfruttare il sistema di coordinate cilindriche (ρ, ϑ, z).

Ne segue che D si può esprimere come $D = \{(\rho, \vartheta, z) :\ 2 \geq z \geq \rho^2;\ \vartheta \in [0, 2\pi]\}$. Inoltre, dalla teoria, si ha che $dxdydz = d\rho d\vartheta dz$ e che $f(\rho, \vartheta, z) = 1/\rho$.

Ora, la sequenza di integrali più economica è

$$\iiint_D f dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \int_{\rho^2}^2 \frac{\rho}{\rho}\ dz\ d\rho\ d\vartheta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \int_{\rho^2}^2 dz\ d\rho\ d\vartheta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} [z]_{\rho^2}^2\ d\rho\ d\vartheta =$$
$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} (2 - \rho^2)\ d\rho\ d\vartheta = \int_0^{2\pi} [2\rho - \rho^3/3)]_0^{\sqrt{2}}\ d\vartheta = \int_0^{2\pi} (2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}/3)\ d\vartheta = 4\sqrt{2}/3 \int_0^{2\pi} d\vartheta =$$
$$2\pi \cdot 4\sqrt{2}/3 = 8\pi\sqrt{2}/3.$$

Il disegno viene lasciato come esercizio ai lettori per mancanza di tempo.

10. È data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) = (x^3 - 3x)(1 - y^2)$. Si calcolino i punti critici di f e si dica di che tipo sono. (7 punti)

Soluzione

Il dominio di f è tutto il piano reale e f è differenziabile, dunque cerchiamo i punti critici semplicemente servendoci delle derivate parziali: $f_x = (3x^2 - 3)(1 - y^2)$ e $f_y = -2y(x^3 - 3x)$, da cui segue che $\{\nabla f = 0\} = \{y = \pm 1,\ x = 0,\ x = \pm\sqrt{3}\} \cup \{x = \pm 1,\ y = 0\}$.

Passando alle derivate seconde otteniamo: $f_{xx} = 6x(1 - y^2),\ f_{xy} = f_{yx} = -2y(3x^2 - 3)$ e $f_{yy} =$

$-2(x^3-3x)$. Ricordando che $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x(1-y^2) & -2y(3x^2-3) \\ -2y(3x^2-3) & -2(x^3-3x) \end{pmatrix}$, segue $\det H_f(x,y) = -12(x^2(1-y^2)(x^2-3)+3y^2(x^2-1)^2)$.

Ora, relativamente ai punti critici del tipo $(x,\pm 1)$, è facile stabilire che $\det H_f(x,y) = -36(x^2-1)^2 < 0$, e dunque i punti critici $(\sqrt{3},\pm 1)$, $(-\sqrt{3},\pm 1)$ e $(0,\pm 1)$ sono di sella.

Circa i rimanenti punti critici, quindi del tipo $(\pm 1, 0)$, è altrettanto facile stabilire che $\det H_f(x,y) = -12x^2(x^2-3) = 24 > 0$, e dunque si devono valutare i segni di f_{xx}: da $f_{xx}(1,0) = 6 > 0$ segue che $(1,0)$ è un punto di minimo, mentre da $f_{xx}(-1,0) = -6 < 0$ segue che $(-1,0)$ è un punto di massimo.

Parte aggiuntiva per chi affronta solo il modulo $\boxed{2}$

(10 punti + 4 punti bonus)

11. Si dica se la funzione f dell'esercizio 10 è limitata o meno. Se ne determini l'equazione del piano tangente nel punto $(0,0)$. Se ne calcoli la derivata direzionale rispetto al versore definito dal vettore $(1,1)$ nel punto $(0,0)$. (5 punti)

    Soluzione

    Ponendo $\tilde{f}(x) = f(x,0) = x^3 - 3x$, si conclude immediatamente che $\lim_{x\to\pm\infty} \tilde{f}(x) = \pm\infty$, e dunque $\tilde{f}$, e in particolare f stessa, sono illimitate.

    Inoltre, sfruttando il calcolo delle derivate parziali dalla soluzione dell'eserczio 10 e ricordando la teoria, sappiamo che il piano tangente $\mathscr{T}_{f,(0,0)}$ cercato è dato dalla formula $\mathscr{T}_{f,(0,0)} = \{f_x(0,0)(x-0) + f_y(0,0)(y-0) - (z - f(0,0)) = 0\} = \{-3x - z = 0\}$.

    Infine, scriviamo il versore $\mathbf{u}$ associato al vettore $(1,1)$: $\mathbf{u} = \dfrac{(1,1)}{|(1,1)|} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. Ora, essendo f polinomiale e quindi certamente differenziabile, la derivata direzionale cercata è data dalla formula: $D_{\mathbf{u}}f(0,0) = \nabla f(0,0)\cdot\mathbf{u} = (-3,0)\cdot(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}) = -3/\sqrt{2}$.

12. È data la funzione a valori vettoriali $\vec{r} : [0,2] \to \mathbb{R}^3$, $\vec{r}(t) = \left(\dfrac{2}{3}+t\right)\vec{i} + \left(\dfrac{7}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}t^2\right)\vec{j} + \left(\dfrac{1}{3}t^3 - 1\right)\vec{k}$. Dopo aver verificato che la curva $\mathscr{R} = \vec{r}([0,2])$ è regolare, si calcoli la lunghezza d'arco $s(t)$ e si calcoli la lunghezza di $\mathscr{R}$. (4 punti)

Soluzione

La derivata prima di $\vec{r}$ vale $\vec{r}\,' = \vec{i} + \frac{2}{\sqrt{2}} t\vec{j} + t^2\vec{k} \neq \vec{0}$ per ogni $t \in [0, 2]$, e dunque $\mathscr{R}$ è regolare.

Poi, $|\vec{r}\,'(t)| = \sqrt{1 + 2t^2 + t^4} = \sqrt{(1 + t^2)^2} = 1 + t^2$, e dunque vale che la lunghezza d'arco è data da $s(t) = \int_0^t |\vec{r}\,'(u)|du = \int_0^t 1+t^2 du = [u+u^3/3]_0^t = t+t^3/3$. In particolare $L(\mathscr{R}) = s(2) = 2+2^3/3 = 14/3$.

13. Si determini il piano osculatore alla curva $\mathscr{R}$ nel punto $P = \vec{r}(1) \in \mathscr{R} \subseteq \mathbb{R}^3$, dove $\mathscr{R}$ è come nell'esercizio 12 (si usi il parametro t e non la lunghezza d'arco). (5 punti)

Soluzione

Sfruttando il calcolo della soluzione dell'esercizio 12 e dalla definizione di tengente si ha che

$\vec{T}(t) = \dfrac{\vec{r}\,'(t)}{|\vec{r}\,'(t)|} = \dfrac{1}{1+t^2}\vec{i} + \dfrac{\sqrt{2}t}{(1+t^2)}\vec{j} + \dfrac{t^2}{1+t^2}\vec{k}$, quindi $\vec{T}(1) = \dfrac{1}{2}\vec{i} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\vec{j} + \dfrac{1}{2}\vec{k}$.

Inoltre, $\vec{T}\,'(t) = -\dfrac{2t}{(1+t^2)^2}\vec{i} + \dfrac{\sqrt{2}(1+t^2) - 2\sqrt{2}t^2}{(1+t^2)^2}\vec{j} + \dfrac{2t(1+t^2) - 2t^3}{(1+t^2)^2}\vec{k}$, quindi

$\vec{T}\,'(1) = \dfrac{1}{2}(-\vec{i} + \vec{k})$, $|\vec{T}\,'(1)| = 1/\sqrt{2}$ e $\vec{N}(1) = \dfrac{\vec{T}\,'(1)}{|\vec{T}\,'(1)|} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}(-\vec{i} + \vec{k})$.

Ora segue che $\vec{B}(1) = \vec{T}(1) \times \vec{N}(1) = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1/2 & 1/\sqrt{2} & 1/2 \\ -1/2\sqrt{2} & 0 & 1/2\sqrt{2} \end{pmatrix} = \dfrac{1}{4}\vec{i} - \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\vec{j} + \dfrac{1}{4}\vec{k}$.

Siccome il piano osculatore richiesto contiene il punto $P = \vec{r}(1) = (5/3, 4\sqrt{2}, -2/3)$, l'equazione cercata è $\mathscr{O}_{\vec{r},P} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ (x - 5/3)/4 - (y - 4\sqrt{2})/2\sqrt{2} + (z + 2/3)/4 = 0\} = \{x/4 - 5/12 - y/2\sqrt{2} + 2 + z/4 + 1/6 = 0\} = \{x/4 - y/2\sqrt{2} + z/4 + 7/4 = 0\}$.